متتاليات عددية

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$

1] احسب u_1 و u_2 و u_3 .

2] نضع $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$ $\forall n \in IN$

بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حسابية محددا أساسها

3] احسب v_n بدلالة n .

4] استنتج u_n بدلالة n .

5] احسب بدلالة n المجموع

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

التمرين الثاني

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4 - U_n} \end{cases}$

1) بين أن $U_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) نضع $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

4) أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية و أحسب V_n بدلالة n

ب) حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثالث

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{U_n} \end{cases}$

1) بين أن $2 \leq U_n < 4$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) نضع $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 4}$ لكل n من $\mathbb{N}$

4) أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب) حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

5) أ- بين أن $4 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $0 \leq 4 - U_n \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^{\,2} + 9}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1- أ- بين بالترجع أن: $u_n > \sqrt{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا .

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$v_n = u_n^{\,2} - 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية محددا أساسها

ب- احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الخامس

1 - لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [\,0\,,1\,]$

بما يلي : $f(x) = \dfrac{x - 8}{2x - 9}$.

بين f تزايدية على المجال I و أن بين أن : $f(I) \subset I$

2 - نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي :

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9} \end{cases}$; $n \in IN$

أ - بين أن : $0 \leq U_n \leq 1$; $(\forall n \in IN)$.

ب - بين أن (U_n) تزايدية و استنتج أنها متقاربة .

ج - احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

التمرين السادس

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حيث : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = U_n + U_n^2$

1) بين أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية

2) بين أن $U_n^2 \geq U_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$

و استنتج أن $U_{n+1} \geq 2U_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$

3) بين أن $U_n \geq 2^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين السابع

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية بحيث :

$$U_{n+1} = U_n^2 + \frac{1}{2}U_n \quad \text{و} \quad U_0 = \frac{1}{4}$$

1) أ- أحسب U_1 , U_2

ب- بين أن $0 < U_n \leq \frac{1}{4}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

3) أ- بين أن $U_{n+1} \leq \frac{3}{4}U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ثم حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

التمرين الثامن

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 3$ و

$U_{n+1} = f(U_n)$ حيث أن $f(x) = \dfrac{6x-1}{x+2}$

1) بين أن الدالة f تزايدية على المجال $I = [2,4]$

2) أ- بين أن $2 < U_n < 4$: $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أحسب U_1 و بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين التاسع

نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$

1) أ- بين أن $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2 - 6}{(x-2)^2}$

ب- استنتج أن f تزايدية على المجال $I = [-2,-1]$

و أن $f(I) \subseteq I$

2) $(U_n)_n$ متتالية معرفة ب: $U_0 = -2$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $-2 \leq U_n \leq -1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن $(U_n)_n$ متتالية تزايدية

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين العاشر

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n^2} \quad , n \in IN \end{cases}$$

1 [احسب u_1 و u_2 .

2 [أ – أثبت أن $0 \langle u_n \langle 1$ $\forall n \in IN$.

ب – بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية ثم استنتج أن

$u_n \geq \frac{1}{2}$ $\forall n \in IN$.

3 [أ – بين أن $1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1-u_n)$ $\forall n \in IN$.

ب – استنتج أن $1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n (1-u_0)$ $\forall n \in IN$.

4 [بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الحادي عشر

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n\sqrt[3]{4-U_n} \\ U_0 = 1 \end{cases}$

و نضع $f(x) = x\sqrt[3]{4-x}$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f على $[0,4]$

ب- بين أن f تزايدية على المجال $[1,3]$ و استنتج أن

$f([1,3]) \subseteq [1,3]$

2) أ- بين أن $1 \leq U_n \leq 3$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

أ- حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$